

Determinación de la aceleración gravitatoria usando un péndulo ideal

R. Cherep Guber,* M. E. Heiberg Bose,** y M. S. Skłodowska Curie***
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires
(Fecha de presentación: 2021-10-01)

En el presente trabajo abordamos la determinación de la aceleración gravitatoria usando un péndulo ideal en el régimen de pequeñas oscilaciones. Para ello, diseñamos y construimos un péndulo con longitud variable y procedimos a medir y analizar el periodo como función de su longitud. Hallamos que el periodo del péndulo es proporcional a la raíz cuadrada de su longitud y determinamos $(9.69 \pm 0.18) \text{ m/s}^2$ como valor de la aceleración gravitatoria terrestre en Buenos Aires, Argentina.

I. INTRODUCCIÓN [1, 2]

En general, un péndulo puede definirse como un cuerpo que se encuentra suspendido de un punto fijo y oscila bajo la acción gravitatoria. El péndulo es uno de los sistemas físicos más sencillos que permite estudiar la fenomenología de las oscilaciones, las cuales son objeto de estudio en casi todas las ramas científicas: desde la química molecular hasta la dinámica de poblaciones.

Un péndulo será ideal si, además, cumple que el cuerpo suspendido es puntual y el vínculo tiene masa despreciable. En la Figura 1 se tipifica el diagrama de cuerpo correspondiente a un péndulo ideal de masa m y longitud L bajo la acción gravitatoria de aceleración g . Dado que el vínculo establece una única libertad de movimiento, correspondiente al ángulo $\theta(t)$, se privilegia la utilización de un sistema de coordenadas polares. En cuyo caso, vía la Segunda Ley de Newton, la ecuación de movimiento es

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0. \quad (1)$$

En un régimen de pequeñas oscilaciones ($\theta \ll 1$), ocurre que $\sin(\theta) \approx \theta$ y, por lo tanto, se puede resolver analíticamente la Ecuación 1 y obtener la solución

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

de un oscilador armónico de amplitud θ_0 , frecuencia angular $\omega = \sqrt{g/L}$ y fase ϕ . De este modo, se puede expresar el periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2)$$

de oscilación del péndulo en términos de L y g .

En este trabajo, verificamos experimentalmente la relación $T(L)$ indicada en la Ecuación 2 y, a partir de ésta, determinamos el valor de g .

II. DISEÑO Y METODOLOGÍA EXPERIMENTAL

Para este experimento diseñamos y construimos el péndulo de la Figura 2. El diseño de este sistema contempló la utilización de una tuerca sujeta a un hilo de costura que, a su vez, se encontraba sujeto a un punto fijo. Procuramos que ambos extremos del hilo se encontraran bien sujetos (sin deslizar) y que se pueda variar a discreción la longitud del hilo. La longitud del péndulo L se aproximaría como la longitud del hilo sumada al radio efectivo de la tuerca.

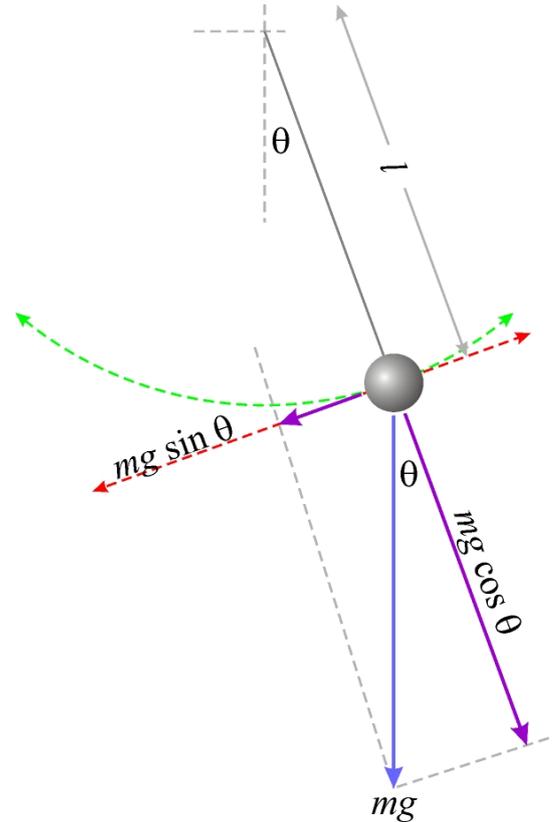


Figura 1. Diagrama de cuerpo libre típico de un péndulo ideal. Atribución: Imagen de dominio público.

* cherep.guber@email.com

** heiberg.bose@email.com

*** sklodowska.curie@email.com

La metodología de medición consistió en apartar el péndulo de su posición de equilibrio y, usando un cronómetro, registrar los tiempos correspondientes a una oscilación completa, hasta un total de 10 oscilaciones. Este procedimiento sería repetido para un total de 5 longitudes del péndulo, equispaciadas entre 20 cm y 40 cm, las cuales serían medidas con una cinta métrica.

Las fuentes de error consideradas fueron la mínima división de la cinta métrica (1 cm) y del cronómetro (0.01 s). El tiempo de respuesta del observador se consideró como parte de las fluctuaciones estadísticas en la determinación del periodo. Asimismo, se supusieron válidas la aproximación de péndulo ideal y pequeñas oscilaciones, por lo que se las despreció como fuentes de error.

III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

La determinación del periodo ($T_L \pm \Delta T_L$), de cada una de las 5 longitudes ($L \pm \Delta L$), se realizó considerando la media y error estándar de cada serie de 10 oscilaciones. En la Figura 3 presentamos nuestros resultados del periodo del péndulo como función de la longitud, cuyos valores específicos pueden encontrarse en el Apéndice V A.

Una forma de estudiar la relación funcional entre el periodo del péndulo y su longitud es linealizando la Ecuación 2, como $T(X) = \alpha X$, con el objetivo de efectuar una regresión lineal. En la Figura 4 se representa el periodo del péndulo en función de la raíz cuadrada de la longitud, junto con la regresión lineal efectuada (ordenada al origen fija en cero).

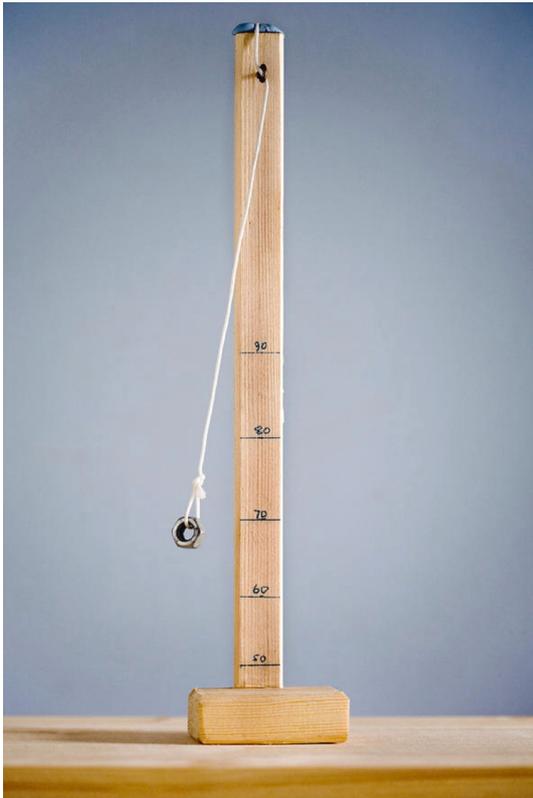


Figura 2. Diseño utilizado para la construcción del dispositivo. Atribución: Adam Hart-Davis / Science Photo Library.

En la Figura 4 se representa el periodo del péndulo en función de la raíz cuadrada de la longitud, junto con la regresión lineal efectuada (ordenada al origen fija en cero). Inviertiendo la relación $\alpha(g)$, se pudo estimar la aceleración gravitatoria g en $(9.69 \pm 0.18) \text{ m/s}^2$. El proceso de linealización y cálculo de g se detalla en el Apéndice VB.

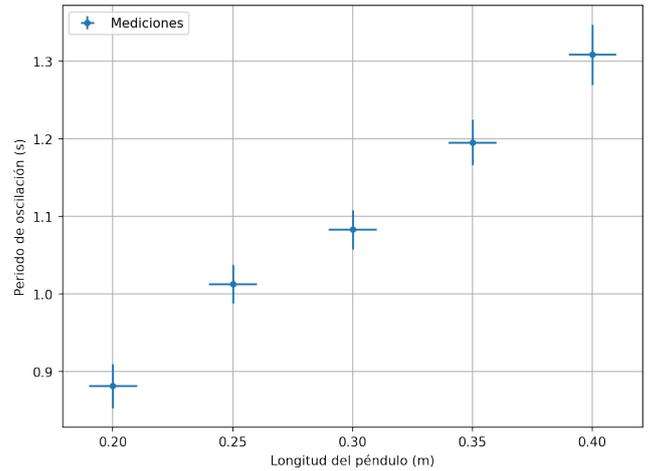


Figura 3. Mediciones experimentales del periodo del péndulo como función de su longitud. La incerteza del periodo se corresponde con el error estándar cada media y la incerteza en la longitud con el error de la cinta métrica.

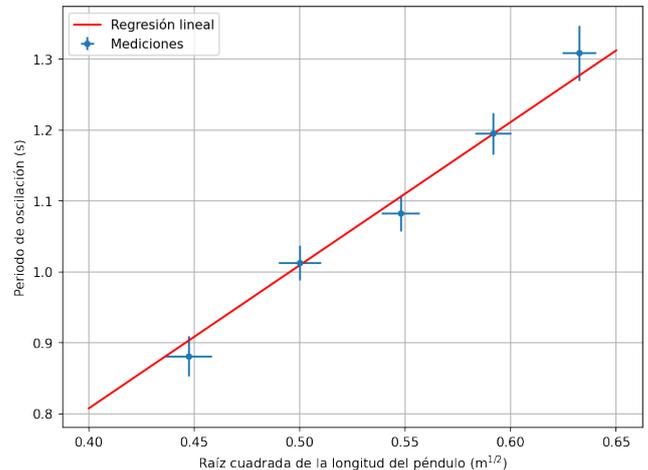


Figura 4. Mediciones experimentales y regresión lineal del periodo del péndulo como función de la raíz cuadrada de la longitud. La regresión lineal se realizó fijando en cero la ordenada al origen y arrojó un valor de pendiente $(2.019 \pm 0.018) \text{ s/m}^{1/2}$. El coeficiente de determinación $R^2 = 0.99$, chi cuadrado $\chi^2 = 0.0017$ ($p > 0.99$) y chi cuadrado reducido $\chi_v^2 = 0.70$.

IV. CONCLUSIÓN

De acuerdo a nuestros resultados y análisis, pudimos confirmar que éstos resultan compatibles con la relación $T(L)$ esperada por la Ecuación 2. Asimismo, pudimos determinar un valor para la aceleración gravitatoria terrestre (en Buenos Aires, Argentina), el cual reportamos en $(9.69 \pm 0.18) \text{ m/s}^2$. Dicho valor es consistente con los valores reportados por otros experimentos [3].

V. APÉNDICE

A. Tabla con resultados

En la Tabla 1 se presentan los resultados correspondientes a la determinación del periodo del péndulo como función de su longitud.

Tabla 1. Resultados de la determinación del periodo del péndulo como función de su longitud. Para cada longitud, el periodo de determinó como el valor medio de 10 mediciones del periodo con su correspondiente error estándar.

Longitud (cm)	Periodo (s)
20 ± 1	0.881 ± 0.028
25 ± 1	1.013 ± 0.025
30 ± 1	1.083 ± 0.025
35 ± 1	1.195 ± 0.029
40 ± 1	1.308 ± 0.039

B. Linealización y cálculo de g

La Ecuación 2 puede ser linealizada considerando

$$T(X) = \alpha X, \quad X = \sqrt{L}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{g}},$$

tal que la incerteza en X sale de propagar

$$\Delta X = \frac{\Delta L}{2\sqrt{L}}.$$

Una regresión lineal aplicada a $T(X)$, fijando la ordenada al origen en cero, permite obtener $\alpha \pm \Delta\alpha$. A partir de estos resultados, la determinación de $g \pm \Delta g$, sale de invertir $\alpha(g)$ y propagar del siguiente modo:

$$g = \frac{4\pi^2}{\alpha^2}, \quad \Delta g = 8\pi^2 \frac{\Delta\alpha}{\alpha^3}.$$

VI. LICENCIA Y AGRADECIMIENTOS

El presente documento **NO constituye un trabajo de investigación** y puede contener errores. El documento sólo fue realizado a fines de presentar un posible formato de informe para estudiantes. Se indica a los estudiantes que borren esta sección de Licencia y Agradecimientos al presentar el informe. El archivo en LaTeX puede encontrarse en <https://garros.net/documenta/modelo.informe.labos.fisica.latex.2021.zip>

Documento elaborado por Adán Garros (adan@garros.net) bajo licencia CC BY-NC-SA 4.0. Se agradece especialmente a Verónica Pérez Schuster por la revisión del contenido. Resultan bienvenidos comentarios y sugerencias. Última actualización: 2021-10-01.

[1] J. G. Roederer, *Mecánica Elemental* (EUDEBA, 2010).
 [2] Sears-Semansky, *Física Universitaria con Física Moderna, Vol. 1* (Addison Wesley, 2014).

[3] RAGA, *Valores de la aceleración gravitatoria en Argentina* (2014), <https://www.ign.gob.ar/NuestrasActividades/Geodesia/Gravimetria/RAGA>.